

Моделирование финансовых рисков

А.А.Новоселов*

Лекции для студентов Института математики СФУ
Архив, 1998 год

Содержание

1	Неопределенность и риск	2
1.1	Неопределенность	2
1.2	Риск	3
1.3	Портфель рисков	3
1.4	Страхование	3
2	Страховые портфели	3
2.1	Простейший страховой портфель	3
2.2	Простой страховой портфель	4
2.3	Реальный страховой портфель	4
3	Цена страхования	5
3.1	Принципы определения цены	5
3.1.1	Принцип безрискованности	5
3.1.2	Принцип справедливости	6
3.1.3	Принцип достаточного покрытия	6
3.2	Неоднородность портфеля	7
4	Введение в теорию полезности	8
4.1	Риск	8
4.2	Предпочтения	10
4.2.1	Отношение предпочтения	10
4.3	Теорема о существовании функции полезности	11
4.3.1	Система аксиом	11
4.3.2	Теорема существования	11
4.4	Решения	14

*Сибирский Федеральный Университет, Свободный пр. 79, 660041, Красноярск, e-mail: arcady@novosyolov.ru

5	Характеризация отношения к риску	15
5.1	Отношение к риску	15
5.1.1	Нейтралитет	15
5.1.2	Склонность к риску	15
5.1.3	Неприятие риска	16
5.2	Количественное выражение неприятия риска	17
5.2.1	Цена риска	17
5.2.2	Неприятие риска	17
5.2.3	Теорема Пратта	17
6	Простейший процесс риска	19
6.1	Описание процесса	19
6.2	Уравнение для вероятности разорения	20
6.3	Вычисление вероятностей разорения	20
6.4	Игра с бесконечно богатым противником	21
7	Классический процесс риска	21
7.1	Определение	21
7.2	Разорение процесса	23
7.3	Зависимость вероятности разорения процесса от параметров	23
8	Агрегированный процесс риска	24
8.1	Операция агрегирования	24
8.2	Разорение	25
8.3	Случайное блуждание	25
8.4	Уравнение для вероятности разорения	26
8.5	Пример: простейший процесс риска	27
9	Время жизни процессов риска	27
9.1	Простейший процесс риска	27
9.2	Игра в кошки – мышки	29

1 Неопределенность и риск

1.1 Неопределенность

Окружающий мир полон неопределенностей, связанных с невозможностью точного предсказания будущих событий. Ошибаясь в прогнозах, мы рискуем получить не совсем то, или совсем не то, что ожидалось. Вездесущая неопределенность является источником **риска**.

Математические модели, описывающие неопределенность, можно разделить на две группы:

- вероятностные модели;
- модели нечетких множеств.

В настоящем курсе мы будем использовать только первый способ описания.

1.2 Риск

Часто нас интересует не столько исход того или иного процесса, сколько связанные с ним количественные характеристики. При этом риск может быть описан **случайной величиной**, или, в общем случае **абстрактным случайным элементом**. Совокупность всех рисков будем обозначать \mathcal{X} , и на начальном этапе ограничимся следующим определением.

Определение 1.1 *Риском называется произвольная случайная величина.*

1.3 Портфель рисков

Совокупность рисков, рассматриваемых совместно, часто обладает новыми свойствами, не присущими каждому из рисков в отдельности, поэтому введем понятие **портфеля** рисков \mathcal{P} , как произвольного подмножества \mathcal{X} .

1.4 Страхование

Под страхованием понимается передача риска от одного носителя (страхователя) другому (специализированной организации – страховой компании, страховщику) за определенную плату, называемую ценой страхования, тарифной ставкой или **страховой премией**. Сущность страхования заключается в перераспределении риска между многими носителями; относительно однородную совокупность рисков будем называть страховым портфелем.

2 Страховые портфели

Рассмотрим некоторые виды страховых портфелей, используемые в дальнейшем.

2.1 Простейший страховой портфель

Простейший страховой портфель

$$\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_N\} \tag{1}$$

состоит из N рисков (случайных величин) X_1, \dots, X_N , являющихся независимыми и одинаково распределенными; X_1 имеет бернуллиевское распределение

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases} \tag{2}$$

Содержательно для каждого риска страховое событие может наступить с вероятностью p , а убыток в результате наступления этого страхового события равен 1 (и одинаков для всех рисков).

Ясно, что риск портфеля

$$X = \sum_{i=1}^N X_i \tag{3}$$

имеет биномиальное распределение с параметрами N, p :

$$\mathbf{P}\{X = k\} = C_N^k p^k (1-p)^{(N-k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

Основные параметры этого распределения равны

$$\mathbf{E}X = Np; \quad \mathbf{D}X = Np(1-p). \quad (5)$$

2.2 Простой страховой портфель

Простой страховой портфель

$$\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_N\} \quad (6)$$

также состоит из N независимых рисков X_1, \dots, X_N , однако их распределения несколько различаются:

$$X_i = \begin{cases} S_i & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases} \quad (7)$$

Содержательно для i -го риска страховое событие наступает с вероятностью p , а размер убытка в результате наступления этого события равен S_i и, вообще говоря, неодинаков у различных рисков. Примером может служить страхование на случай смерти с величиной S_i , определяемой страховой суммой i -го договора портфеля.

Распределение риска портфеля (3) в данном случае уже не имеет столь простого выражения, как (4), но его основные параметры все еще легко вычисляются:

$$\mathbf{E}X = Np\bar{S}_N; \quad \mathbf{D}X = Np(1-p)\widehat{S}_N^2, \quad (8)$$

где

$$\bar{S}_N = N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i; \quad \widehat{S}_N^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (9)$$

2.3 Реальный страховой портфель

Реальный страховой портфель является дальнейшим усложнением простого портфеля; здесь допускаются произвольные размеры убытков из диапазона $[0, S_i]$. Формальное описание этого портфеля таково: он состоит из N независимых рисков

$$\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_N\}, \quad (10)$$

вероятность наступления страхового события по i -му риску по-прежнему равна p , а размер убытка, вызванного страховым событием описывается случайной величиной

$$X_i = \xi_i r_i S_i,$$

где

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p \end{cases}$$

есть индикатор наступления страхового события по i -му риску, S_i – страховая сумма (ответственность) по i -му риску, а r_1, \dots, r_N – совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F_r(v) = \mathbf{P}\{r_1 \leq v\}$.

Здесь распределение риска портфеля также не имеет простого явного выражения, но по известным параметрам распределения r_1

$$m = \mathbf{E}r_1, \quad \tau^2 = \mathbf{D}r_1 \quad (11)$$

нетрудно подсчитать основные параметры риска портфеля (3):

$$\mathbf{E}X = pmN\bar{S}_N, \quad \mathbf{D}X = pm^2N\hat{S}_N[1 - p + \tau^2/m^2]. \quad (12)$$

Упражнение 2.1 Вывести формулы (5), (8), (12) для параметров рассмотренных портфелей.

3 Цена страхования

Одной из основных задач теории риска является определение цены, которую следует уплатить при передаче риска от одного носителя к другому. В страховании принято выражать страховую премию в долях от страховой суммы (ответственности) S_i соответствующего риска. Таким образом, при размере премии T (одинаковом для всех рисков портфеля) абсолютный размер премии i -го риска оказывается равным TS_i , а суммарная премия портфеля –

$$Q = TN\bar{S}_N. \quad (13)$$

Попытаемся сначала сформулировать некоторые естественные принципы определения цены, и рассмотрим их действие на примере простейшего страхового портфеля.

3.1 Принципы определения цены

3.1.1 Принцип безрискованности

В качестве первого принципа попытаемся назначить цену так, чтобы деятельность страховой компании была безрискованной, то есть, чтобы собранных премий (13) с вероятностью 1 хватало для покрытия всех страховых убытков портфеля. В случае простейшего портфеля максимальный размер убытка портфеля равен N , а вероятность его появления: $p^N > 0$, так что для выполнения этого требования необходимо обеспечить равенство $Q = TN = N$, откуда $T = 1$, т.е. абсолютный размер премии совпадает с ответственностью по риску. Ясно, что такое страхование является совершенно непривлекательным для страхователей, и его рассмотрение лишено смысла. Нетрудно проверить, что данный вывод справедлив и для более сложных портфелей рисков (см. упражнение 3.1). Отсюда следует вывод:

Безрискованное ведение страхового бизнеса невозможно,

и, в частности, страховая премия должна удовлетворять неравенству $T < 1$.

3.1.2 Принцип справедливости

Попробуем теперь обеспечить "справедливость" процесса передачи рисков, т.е. эквивалентность финансовых обязательств партнеров. Поскольку размер страховой премии (финансового обязательства страхователя) детерминирован, а размер обязательства страховщика (возмещаемого страхового убытка) случаен, будем понимать равенство этих обязательств в среднем по портфелю: $TN = \mathbf{E}X$, откуда, с учетом (5), $T = p$. Как мы увидим далее при рассмотрении процессов риска, такой размер премии является слишком малым, поскольку при многократном воспроизведении такого страхового портфеля с вероятностью 1 происходит разорение страховой компании. Здесь проиллюстрируем этот эффект следующими соображениями. Зададимся вопросом: каков будет размер прибыли страховщика после m – кратного воспроизведения портфеля, сформированного по справедливому принципу. Прибыль j -го портфеля представляет собой случайную величину $Z^{(j)} = Q - X^{(j)}$ с $\mathbf{E}Z^{(j)} = 0$ и $\mathbf{D}Z^{(j)} = \sigma^2 > 0$. Поэтому искомая прибыль есть

$$Z_m = \sum_{j=1}^m Z^{(j)},$$

причем $\mathbf{E}Z_m = 0$ и (в случае независимости портфелей) $\mathbf{D}Z_m = m\sigma^2$, т.е. прибыль m портфелей в среднем равна 0, но неопределенность в ее значении возрастает с ростом m , в частности, может достигнуть сколь угодно малого значения, приводя к разорению компании.

Таким образом, премия должна удовлетворять неравенству $T > p$. Для более сложных портфелей (см. упражнение 3.2) вывод звучит следующим образом: премия должна превосходить размер среднего относительного убытка портфеля $\mathbf{E}(X/R)$, где $R = \sum S_i$ – суммарная ответственность по портфелю.

3.1.3 Принцип достаточного покрытия

В предыдущих пунктах мы убедились в том, что первые два принципа исчисления премии неработоспособны, и следует искать другие принципы, приводящие к значениям $T \in (p, 1)$ (для простейшего портфеля). Здесь рассмотрим принцип достаточного покрытия, сущность которого заключается в следующем: поскольку единичную вероятность покрытия будущих убытков портфеля X премиями Q обеспечить не удастся, попытаемся обеспечить заданное значение этой вероятности: зафиксируем число $\alpha \in (0, 1)$ и будем определять премию T из уравнения

$$\mathbf{P}\{X \leq Q\} = \alpha. \quad (14)$$

Пусть F – функция распределения риска портфеля: $F(x) = \mathbf{P}\{X \leq x\}$, F_0 – функция распределения соответствующей центрированной и нормированной случайной величины $(X - \mathbf{E}X)/\sqrt{\mathbf{D}X}$. Тогда уравнение (14) приводится к виду

$$F_0((Q - \mathbf{E}X)/\sqrt{\mathbf{D}X}) = \alpha, \quad (15)$$

откуда, с учетом (13), (5), получаем

$$T = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} F_0^{-1}(\alpha) = p \left(1 + \sqrt{\frac{1-p}{pN}} F_0^{-1}(\alpha) \right). \quad (16)$$

В случае большого объема портфеля N ссылка на центральную предельную теорему позволяет переписать (16) в виде

$$T = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \Phi^{-1}(\alpha) = p \left(1 + \sqrt{\frac{1-p}{pN}} \Phi^{-1}(\alpha) \right), \quad (17)$$

где Φ – функция стандартного нормального распределения.

Из (15) с использованием (8), (12), аналогично получаем выражения страховой премии для простого

$$T = p + \frac{\hat{S}_N}{\bar{S}_N} \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} F_0^{-1}(\alpha) = p \left(1 + \frac{\hat{S}_N}{\bar{S}_N} \sqrt{\frac{1-p}{pN}} F_0^{-1}(\alpha) \right) \quad (18)$$

и реального

$$T = pm \left(1 + \frac{\hat{S}_N}{\bar{S}_N} \sqrt{\frac{1-p + \tau^2/m^2}{pN}} F_0^{-1}(\alpha) \right) \quad (19)$$

портфелей, соответственно. Здесь функция распределения F_0 также может быть при большом объеме портфеля заменена на функцию стандартного нормального распределения.

Отметим, что именно формула (19), полученная нами здесь с использованием исключительно элементарных средств, рекомендована российским страховщикам нормативными документами [1] для расчетов страховой премии по всем видам страхования, отличным от страхования жизни (причем с заменой множителя \hat{S}_N/\bar{S}_N на произвольно выбранную постоянную 1.2). Вся излагаемая дальше теория еще ждет своего применения в практике российского страхового рынка.

3.2 Неоднородность портфеля

Простейший страховой портфель является вполне однородным, а в простом и реальном допускаются различные величины страховых сумм S_i , что приводит к неоднородности этих портфелей. Указанная неоднородность количественно определяется коэффициентом

$$n_{\mathcal{P}} = \hat{S}_N / \bar{S}_N. \quad (20)$$

Изучим здесь его возможные значения.

Предложение 3.1 *Значения коэффициента неоднородности портфеля (20) лежат в интервале $[1, \sqrt{N}]$.*

Доказательство. Для удобства будем рассматривать значения $n_{\mathcal{P}}^2$ и покажем, что они лежат в $[1, N]$. Рассмотрим вспомогательную дискретную случайную величину ξ , принимающую значения S_1, \dots, S_N с вероятностями N^{-1} . Для нее, очевидно, справедливо

$$\mathbf{E}\xi = \bar{S}_N, \quad \mathbf{E}\xi^2 = \hat{S}_N^2,$$

так что

$$\mathbf{D}\xi = \hat{S}_N^2 - \bar{S}_N^2 \geq 0,$$

откуда $n_{\mathcal{P}}^2 \geq 1$. Для нахождения верхней границы диапазона значений $n_{\mathcal{P}}^2$ заметим, что максимизация $n_{\mathcal{P}}^2$ на неотрицательном ортанте \mathbf{R}^+ эквивалентна задаче оптимизации

$$f(S_1, \dots, S_N) = S_1^2 + \dots + S_N^2 \longrightarrow \max_{S_1, \dots, S_N}, \quad (21)$$

$$S_1 + \dots + S_N = 1, \quad (22)$$

$$S_1 \geq 0, \dots, S_N \geq 0, \quad (23)$$

и покажем, что ее экстремальными точками могут быть только единичные орты \mathbf{R}^N , т.е. векторы вида $S = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ с единицей на i -й позиции (для каждого такого вектора, очевидно, $f(S_1, \dots, S_N) = 1$). Действительно, пусть решением задачи (21) – (23) является точка $S^{(0)}$, некоторые координаты $S_j^{(0)}, S_k^{(0)}$ которой удовлетворяют неравенствам $0 < S_j^{(0)} \leq S_k^{(0)} < 1$. Ввиду симметрии задачи можно считать $j < k$. Тогда при достаточно малых δ точка $S^{(1)} = (\dots, S_j^{(0)} - \delta, \dots, S_k^{(0)} + \delta, \dots)$ является допустимой в этой задаче и

$$f(S^{(1)}) - f(S^{(0)}) = 2\delta(S_k^{(0)} - S_j^{(0)}) + 2\delta^2 > 0,$$

что противоречит экстремальности $S^{(0)}$. Значения же квадрата коэффициента неоднородности на единичных ортах равны, очевидно, N , что и требовалось. \diamond

Упражнение 3.1 Показать для простого и реального портфелей, что принцип безрискованности дает значение цены страхования $T = 1$.

Упражнение 3.2 Применить принцип эквивалентности к простому и реальному портфелям. Показать, что страховая премия должна превосходить размер средних относительных убытков портфеля.

Упражнение 3.3 Дать геометрическую интерпретацию доказательства предложения 3.1.

4 Введение в теорию полезности

4.1 Риск

Риск есть состояние *неопределенности*, неполной информации относительно каких – либо событий в будущем. Чаще других для математического описания неопределенности используются следующие два способа:

- вероятностное описание;
- нечеткие (размытые) множества.

Второй способ предназначен для описания неопределенностей, присущих высказываниям на человеческих (неформализованных) языках.

Мы будем рассматривать только первый способ и, таким образом, определим риск, как состояние *вероятностной неопределенности*: будущие события нельзя предсказать точно, однако известно их вероятностное распределение.

В простейших случаях множество будущих событий конечно и риск представляется вероятностным распределением на конечном пространстве элементарных событий.

Пример 4.1 В эксперименте с подбрасыванием монеты мы не можем точно предсказать исход этого эксперимента, однако множество всех возможных исходов конечно: $\Omega = \{g, p\}$ и известно вероятностное распределение на этом множестве: каждый из исходов может появиться с вероятностью $1/2$.

Часто нас интересуют не столько сами исходы эксперимента, сколько связанные с ними количественные значения; в этом случае риск описывается распределением некоторой случайной величины.

Пример 4.2 В условиях предыдущего примера монета может подбрасываться в процессе игры двух лиц, в которой первый игрок выигрывает или проигрывает единицу в зависимости от выпавшей стороны монеты. Здесь риск описывается дискретной случайной величиной, принимающей значения ± 1 с вероятностями $1/2$.

Пример 4.3 Доходность финансового вложения в фиксированную ценную бумагу не может быть точно предсказана заранее, однако всевозможные значения этой доходности могут быть описаны случайной величиной с распределением, полученным статистическими методами по данным о прошлом поведении доходности данной ценной бумаги.

В более сложных случаях риск может описываться распределением случайного вектора, или, вообще говоря, распределением произвольного абстрактного случайного элемента; приведем строгое определение.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ – измеримое пространство, где $\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_\Theta$ – σ -алгебры событий на Ω, Θ , соответственно. Напомним, что случайным элементом Ξ на $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbf{P})$ со значениями в $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ называется измеримое (относительно пары σ -алгебр $\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_\Theta$) отображение $\Xi : \Omega \rightarrow \Theta$.

Определение 4.1 Риском называется произвольный случайный элемент.

Пример 4.4 Пусть $\Theta = \mathbf{R}$ – вещественная прямая, $\mathcal{F}_\Theta = \mathcal{B}$ – σ -алгебра борелевских множеств на \mathbf{R} , тогда риск есть случайная величина.

Пример 4.5 Пусть $\Theta = \mathbf{R}^n$ – n -мерное пространство, $\mathcal{F}_\Theta = \mathcal{B}$ – σ -алгебра его борелевских множеств, тогда риск есть случайный вектор.

Пример 4.6 Пусть \mathcal{X} – произвольное конечное множество, $\Theta = 2^{\mathcal{X}}$ – совокупность всех его подмножеств, \mathcal{F}_Θ – алгебра всех подмножеств Θ , тогда Ξ есть случайное конечное абстрактное множество.

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ будем трактовать, как окружающую среду, а измеримое пространство $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ – как пространство результатов. Каждый случайный элемент Ξ порождает на $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ вероятностное распределение по правилу

$$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \Xi(\omega) \in T\} = \mathbf{P}\{\Xi^{-1}(T)\}, \quad T \in \mathcal{F}_\Theta, \quad (24)$$

превращая его тем самым в вероятностное пространство $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta, P)$. Будем обозначать \mathcal{P} совокупность всех таких вероятностных распределений на $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$.

Упражнение 4.1 Приведите пример нечеткого высказывания.

Упражнение 4.2 Приведите другие примеры рисков.

Упражнение 4.3 Совпадает ли совокупность распределений \mathcal{P} с множеством всевозможных вероятностных распределений на $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$?

4.2 Предпочтения

4.2.1 Отношение предпочтения

Определение 4.2 *Отношение \succeq на произвольном множестве Y называется отношением предпочтения, если оно*

- p1) полно, т.е. $\forall x, y \in Y$ верно $x \succeq y$ или $y \succeq x$;*
p2) транзитивно, т.е. $x \succeq y, y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Пример 4.7 *Частным случаем отношения предпочтения является отношение полного упорядочения \geq , удовлетворяющее аксиомам*

- o1) $\forall x, y \in Y$ верно $x \geq y$ или $y \geq x$ (полнота);*
o2) $x \geq y, y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (транзитивность);
o3) $x \geq y, y \geq x \Rightarrow x = y$ (антисимметричность).

Видно, что, в отличие от отношения порядка, отношение предпочтения не обладает, вообще говоря, свойством антисимметричности, т.е. из $x \succeq y$ и $y \succeq x$ не вытекает равенство x и y . Будем в этом случае называть x, y одинаково предпочтительными или эквивалентными и использовать для обозначения этого факта символ \sim :

$$x \succeq y, y \succeq x \implies x \sim y.$$

Замечание 4.1 *Отметим здесь следующий факт: отношение "одинаковой предпочтительности" является в строгом смысле отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами рефлексивности $x \sim x, \forall x \in Y$, транзитивности $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ и симметричности $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, причем порожденное им фактор-множество $\mathcal{Y} = Y / \sim$ является вполне упорядоченным множеством с отношением порядка \succeq , индуцированным отношением предпочтения \succeq на Y : для $Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}$ отношение $Y_1 \succeq Y_2$ означает, что для некоторых ($и, тем самым, для произвольных$) $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ выполняется $y_1 \succeq y_2$.*

Если же x предпочтительнее y , а обратное неверно, то будем использовать символ строгого предпочтения \succ :

$$x \succeq y, y \not\succeq x \implies x \succ y.$$

Разумный индивидуум имеет четкое представление о системе своих предпочтений на пространстве результатов Θ : для произвольной пары $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ он может вполне определенно сказать, какой из этих элементов является для него более предпочтительным, или же эти элементы эквивалентны. Если результаты (элементы Θ) трактуются, как доходности, то Θ является подмножеством вещественной оси и отношение предпочтения можно задавать с помощью обычного отношения порядка на множестве вещественных чисел.

В теории полезности делается более сильное предположение: индивидуум имеет систему предпочтений и на пространстве распределений \mathcal{P} , т.е. для каждой пары распределений $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ может определенно указать более предпочтительное для него распределение или утверждать их эквивалентность. Таким образом, на \mathcal{P} постулируется существование *отношения предпочтения* \succeq . Замечательнейшим фактом теории полезности является существование (при некоторых вполне естественных предположениях) *функции полезности*, адекватно описывающей это отношение предпочтения.

Упражнение 4.4 Верно ли $\forall x \in Y : x \succeq x$?

Упражнение 4.5 Показать, что отношение \succeq , введенное на \mathcal{Y} в замечании 4.1, действительно является отношением порядка на \mathcal{Y} .

4.3 Теорема о существовании функции полезности

4.3.1 Система аксиом

Введем на \mathcal{P} операцию смеси распределений: для произвольных $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ и числа $\alpha \in [0, 1]$ смесью \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 назовем распределение $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$, задаваемое соотношением

$$\mathbf{P}(C) = \alpha\mathbf{P}_1(C) + (1 - \alpha)\mathbf{P}_2(C), \quad C \in \mathcal{C}.$$

Будем предполагать выполненной следующую систему аксиом.

A1) На \mathcal{P} существует отношение предпочтения \succeq .

A2) Если $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2$, то

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} : \alpha\mathbf{P}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{P} \sim \alpha\mathbf{P}_2 + (1 - \alpha)\mathbf{P}. \quad (25)$$

A3) Если $\mathbf{P}_1 \succ \mathbf{P}_2$, то

$$\forall \alpha \in (0, 1], \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} : \alpha\mathbf{P}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{P} \succ \alpha\mathbf{P}_2 + (1 - \alpha)\mathbf{P}. \quad (26)$$

A4) Если $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$, то существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha\mathbf{P}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{P}_3. \quad (27)$$

Приведенные аксиомы можно трактовать, как требования наличия у отношения предпочтения некоторой регулярности, "правильности".

4.3.2 Теорема существования

Прежде чем формулировать основную теорему, докажем несколько лемм.

Лемма 4.1 Пусть выполнены аксиомы A1–A4, $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3 \succeq \mathbf{P}_2 \succeq \mathbf{P}_1$. Тогда существует единственная постоянная $\alpha \in [0, 1]$ такая, что

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha\mathbf{P}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{P}_3. \quad (28)$$

Доказательство. Заметим, что если $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \sim \mathbf{P}_1$, то соотношение (28) выполняется при единственном значении $\alpha = 1$ (см. упражнение 4.6). Аналогично, если $\mathbf{P}_3 \sim \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$, то (28) выполняется только при $\alpha = 0$ (см. упражнение 4.7).

Пусть теперь $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$. Тогда по аксиоме A4 существует $\alpha_1 \in (0, 1)$ такое, что выполнено

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha_1\mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_1)\mathbf{P}_3. \quad (29)$$

Предположим, что такое α_1 неединственно, и существует $\alpha_2 \in (0, 1)$, для которого

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha_2 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_2) \mathbf{P}_3. \quad (30)$$

Положим для определенности $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Тогда

$$\mathbf{P}_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 \quad (31)$$

и

$$\alpha_2 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_2) \mathbf{P}_3 = \alpha_1 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_1) \left[\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 \right]. \quad (32)$$

Поскольку $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_1$, по аксиоме А3 и (31) получаем

$$\mathbf{P}_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 \succ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3. \quad (33)$$

Отсюда с использованием аксиомы А3 и (32) получаем:

$$\alpha_2 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_2) \mathbf{P}_3 = \alpha_1 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_1) \left[\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 \right] \prec \alpha_1 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_1) \mathbf{P}_3. \quad (34)$$

Это соотношение противоречит (29), (30), так что постоянная α_1 , для которой выполнено (29) – единственна. \diamond

Лемма 4.2 Если выполнены аксиомы А1–А4, $\mathbf{P}_3 \succeq \mathbf{P}'_2 \succeq \mathbf{P}_2 \succeq \mathbf{P}_1$ и $\alpha = \alpha(\mathbf{P}_2)$, $\alpha' = \alpha(\mathbf{P}'_2)$ таковы, что

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{P}_3, \quad \mathbf{P}'_2 \sim \alpha' \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha') \mathbf{P}_3, \quad (35)$$

то $\alpha \geq \alpha'$ (монотонность операции смешивания)

Доказательство. Пусть, напротив, $\alpha < \alpha'$. Тогда, по аксиомам А3, А4 имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}'_2 \sim \alpha' \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha') \mathbf{P}_3 = \\ & (1 - \alpha + \alpha') \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha'} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha'}{1 - \alpha + \alpha'} \mathbf{P}_3 \right] + (\alpha' - \alpha) \mathbf{P}_1 \prec \\ & (1 - \alpha + \alpha') \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha'} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha'}{1 - \alpha + \alpha'} \mathbf{P}_3 \right] + (\alpha' - \alpha) \mathbf{P}_3 = \\ & \alpha \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{P}_3 \sim \mathbf{P}_2, \end{aligned}$$

так что $\mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}'_2$ – противоречие. \diamond

Теорема 4.3 Если выполнены аксиомы А1–А4, то существует вещественнозначная функция $U : \Theta \rightarrow \mathbf{R}$, называемая функцией полезности, и такая, что для произвольных $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ соотношение $\mathbf{P}_2 \succeq \mathbf{P}_1$ эквивалентно

$$\mathbf{E}U(\Xi_1) \geq \mathbf{E}U(\Xi_2), \quad (36)$$

где Ξ_1, Ξ_2 – случайные элементы, задающие распределения $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$, соответственно. Более того, функция U единственна с точностью до положительного аффинного преобразования.

Замечание 4.2 Теорема 4.3 позволяет в качестве средства для сравнения рисков Ξ по предпочтительности использовать их ожидаемую полезность

$$u(\Xi) = \mathbf{E}U(\Xi).$$

Доказательство теоремы 4.3 проведем в предположении конечности множества результатов: $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$. При этом каждое распределение $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ можно представить вектором $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_N)$, так что $\mathbf{P}\{\theta_i\} = p_i$, $i = 1, \dots, N$. Рассмотрим распределения $\mathbf{P}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{P}_N = (0, 0, \dots, 1)$. Без ограничения общности можем считать, что

$$\mathbf{P}_N \succeq \dots \succeq \mathbf{P}_1. \quad (37)$$

Если $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2 \sim \dots \sim \mathbf{P}_N$, то утверждение теоремы тривиально (см. упражнение 4.8), поэтому сразу считаем $\mathbf{P}_N \succ \mathbf{P}_1$. Пусть A_1, A_N – произвольные постоянные с $A_1 < A_N$, зададим $U(\theta_1) = A_1$, $U(\theta_N) = A_N$. Обозначим α_i , $i = 1, \dots, N$ те (по лемме 4.1 однозначно определенные) постоянные, при которых

$$\mathbf{P}_i \sim \alpha_i \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_i) \mathbf{P}_N, \quad i = 1, \dots, N. \quad (38)$$

Ясно, что $\alpha_1 = 1$, $\alpha_N = 0$. Определим

$$U(\theta_i) = A_i = \alpha_i A_1 + (1 - \alpha_i) A_N, \quad i = 1, \dots, N. \quad (39)$$

Покажем теперь, что так определенная функция U обладает свойством (36). Для произвольного распределения $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{P}$, как нетрудно заметить $\mathbf{P}_N \succeq \mathbf{P} \succeq \mathbf{P}_1$ (см. упражнение 4.9), так что мы можем задать $\alpha(\mathbf{P})$ как (однозначно определенную) постоянную из $[0, 1]$, для которой

$$\mathbf{P} \sim \alpha(\mathbf{P}) \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha(\mathbf{P})) \mathbf{P}_N. \quad (40)$$

Из леммы 4.2 вытекает, что $\mathbf{P}' \succeq \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\mathbf{P}) \geq \alpha(\mathbf{P}')$. Из (38) имеем:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{P}_i \sim \sum_{i=1}^N p_i [\alpha_i \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_i) \mathbf{P}_N] \sim \left(\sum_{i=1}^N p_i \alpha_i \right) \mathbf{P}_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^N p_i \alpha_i \right) \mathbf{P}_N. \quad (41)$$

Сравнивая (40) и (41), видим, что

$$\alpha(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^N p_i \alpha_i.$$

Таким образом, $\mathbf{P}' \succeq \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^N p'_i \alpha_i \leq \sum_{i=1}^N p_i \alpha_i. \quad (42)$$

Из (39) вытекает, что $\alpha_i = (A_N - A_i)/(A_N - A_1)$; подставляя это в (42), заключаем, что $\mathbf{P}' \succeq \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^N p'_i \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1} \leq \sum_{i=1}^N p_i \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1},$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{i=1}^N p'_i A_i \geq \sum_{i=1}^N p_i A_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N p'_i U(\theta_i) \geq \sum_{i=1}^N p_i U(\theta_i),$$

и (36) доказано.

Осталось показать, что U определено единственным образом с точностью до положительного аффинного преобразования. Пусть U^* – другая функция полезности, удовлетворяющая (36). Обозначим $A_i^* = U^*(\theta_i)$, $i = 1, \dots, N$ из (36) и (39) имеем:

$$U^*(\theta_i) = \alpha_i U^*(\theta_i) + (1 - \alpha_i) U^*(\theta_i),$$

откуда

$$\alpha_i = \frac{A_N^* - A_i^*}{A_N^* - A_1^*} = \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1},$$

так что

$$A_i^* = A_N^* - (A_N^* - A_1^*) \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1} = A_N^* - \frac{(A_N^* - A_1^*) A_N}{A_N - A_1} + \frac{A_N^* - A_1^*}{A_N - A_1} A_i.$$

Таким образом, U^* действительно является положительным аффинным преобразованием от U . \diamond

Упражнение 4.6 Доказать, что в условиях леммы 4.1 условие $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \sim \mathbf{P}_1$ влечет выполнение (28) при единственном значении $\alpha = 1$.

Упражнение 4.7 Доказать, что в условиях леммы 4.1 условие $\mathbf{P}_3 \sim \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$ влечет выполнение (28) при единственном значении $\alpha = 0$.

Упражнение 4.8 Доказать, что если в условиях теоремы 4.3 $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2 \sim \dots \sim \mathbf{P}_N$, то ее утверждение справедливо.

Упражнение 4.9 Доказать, что если в условиях теоремы 4.3 справедливо (37), то для произвольного распределения $P \in \mathcal{P}$ имеет место $P_N \succeq P \succeq P_1$.

4.4 Решения

Введем теперь в рассмотрение активного индивидуума. Пусть \mathcal{A} обозначает множество его действий (решений), и поведение системы в целом описывается функцией $X : \mathcal{A} \times \Omega \mapsto \Theta$, измеримой относительно ω при каждом фиксированном $a \in \mathcal{A}$ (т.е. $\{\omega \in \Omega : X(a, \omega) \in F\} \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}_\Theta$), так что если индивидуум принял решение $a \in \mathcal{A}$, а среда оказалась в (случайном) состоянии $\omega \in \Omega$, то результатом действия a будет $\theta = X(a, \omega) \in \Theta$. Так, например, решением a может служить структура инвестиционного портфеля, состоянием среды ω – доходности ценных бумаг, входящих в портфель, а результатом θ – доходность портфеля в целом.

5 Характеризация отношения к риску

5.1 Отношение к риску

Пусть \mathcal{X} – совокупность всех рисков (для определенности – случайных величин); рассмотрим произвольный риск $X \in \mathcal{X}$ с функцией распределения $F(z) = \mathbf{P}\{X \leq z\}$ и математическим ожиданием $\mu_X = \mathbf{E}X$; в качестве меры полезности риска будем использовать $u(X)$ – среднее значение некоторой функции полезности U на этом риске:

$$u(X) = \mathbf{E}U(X). \quad (43)$$

Исследуем связь формы функции полезности с отношением ее обладателя к риску. Значения X здесь будем трактовать, как доход (чем больше, тем лучше), а функцию полезности U считать возрастающей, так что индивидуум с данной функцией полезности стремится максимизировать значение $u(\cdot)$. В зависимости от соотношения $u(X)$ и μ_X будем различать следующие варианты отношения индивидуума к риску:

- нейтральное отношение: $u(X) = \mu_X, X \in \mathcal{X}$;
- склонность к риску: $u(X) \geq \mu_X, X \in \mathcal{X}$;
- неприятие риска: $u(X) \leq \mu_X, X \in \mathcal{X}$.

Будем обозначать классы функций полезности, описывающих нейтральное отношение, склонность к риску и неприятие риска $\mathcal{U}_N, \mathcal{U}_R, \mathcal{U}_A$, соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_N &= \{U : \mathbf{E}U(X) = U(\mathbf{E}X), X \in \mathcal{X}\}, \\ \mathcal{U}_R &= \{U : \mathbf{E}U(X) \geq U(\mathbf{E}X), X \in \mathcal{X}\}, \\ \mathcal{U}_A &= \{U : \mathbf{E}U(X) \leq U(\mathbf{E}X), X \in \mathcal{X}\}. \end{aligned}$$

5.1.1 Нейтралитет

Рассмотрим сначала линейную функцию полезности $U(z) = az + b$. В этом случае

$$u(X) = \mathbf{E}U(X) = \mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}X + b = U(\mathbf{E}X) = U(\mu)$$

ввиду линейности математического ожидания. Это означает, что линейная функция полезности описывает нейтральное отношение к риску и любая линейная функция U является элементом \mathcal{U}_N .

5.1.2 Склонность к риску

Пусть теперь функция полезности U выпукла, т.е. удовлетворяет условию

$$U(\alpha y + (1 - \alpha)z) \leq \alpha U(y) + (1 - \alpha)U(z), \alpha \in [0, 1],$$

и, более общо,

$$U\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i U(z_i), \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (44)$$

Тогда, полагая распределение X для простоты дискретным со значениями z_i и соответствующими вероятностями p_i , $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\mathbf{E}U(X) = \int U(z) dF(z) = \sum_{i=1}^n U(z_i)p_i \geq U\left(\sum_{i=1}^n z_i p_i\right) = U(\mathbf{E}X) = U(\mu), \quad (45)$$

т.е. выпуклая функция полезности описывает склонность к риску. Отметим здесь, что вывод формулы (45) справедлив для произвольного, а не только дискретного распределения X .

5.1.3 Неприятие риска

Рассмотрим теперь случай вогнутой функции полезности, удовлетворяющей условию

$$U\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i U(z_i), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (46)$$

Здесь аналогично получаем неравенство

$$\mathbf{E}U(X) = \int U(z) dF(z) = \sum_{i=1}^n U(z_i)p_i \leq U\left(\sum_{i=1}^n z_i p_i\right) = U(\mathbf{E}X) = U(\mu), \quad (47)$$

означающее, что вогнутые функции полезности описывают неприятие риска (risk aversion). Верно и обратное утверждение: неприятие риска описывается вогнутой функцией полезности; сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 5.1 Если для произвольного риска X выполняется неравенство

$$\mathbf{E}U(X) \leq U(\mathbf{E}X), \quad X \in \mathcal{X}$$

то функция U является вогнутой, т.е. удовлетворяет условию (46).

Замечание 5.1 Поскольку реальные участники рынков с рисками не принимают риск, т.е. предпочитают детерминированный актив μ_X риску X с $\mathbf{E}X = \mu_X$, всюду в дальнейшем будем рассматривать только строго вогнутые функции полезности. Без существенного ущерба для общности можно считать U достаточно гладкой функцией.

Таким образом, можно дать следующее определение:

Определение 5.1 Функцией полезности называется дважды непрерывно дифференцируемая функция, обладающая свойствами

$$U(0) = 0, \quad U'(x) > 0, \quad U''(x) < 0, \quad x \geq 0. \quad (48)$$

Упражнение 5.1 Доказать теорему 5.1.

Упражнение 5.2 Доказать аналогичную теорему:

$$\mathbf{E}U(X) \leq U(\mathbf{E}X), \quad X \in \mathcal{X} \iff U \in \mathcal{U}_{\mathcal{R}}$$

Упражнение 5.3 Доказать:

$$\mathbf{E}U(X) = U(\mathbf{E}X), \quad X \in \mathcal{X} \iff U \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$$

5.2 Количественное выражение неприятия риска

5.2.1 Цена риска

Пусть X – произвольный риск, w – начальный капитал индивидуума. Очевидно, $w + X$ также является риском. Ясно, что если $\mathbf{D}X > 0$, то $\mathbf{E}U(X) < U(\mathbf{E}X)$ и, следовательно, для произвольного $w \geq 0$ имеем

$$\mathbf{E}U(w + X) < U(w + \mathbf{E}X), \quad (49)$$

так что уравнение

$$\mathbf{E}U(w + X) = U(w + \mathbf{E}X - \pi) \quad (50)$$

имеет единственное решение $\pi > 0$, зависящее от риска X , начального капитала w и функции полезности U .

Определение 5.2 Решение $\pi = \pi(X) = \pi_{w,U}(X)$ уравнения (50) называется **ценой риска** X .

Явное выражение для цены риска имеет вид

$$\pi = w + \mathbf{E}X - U^{-1}[\mathbf{E}U(w + X)], \quad (51)$$

откуда, с учетом (49) очевидна его положительность.

Представляет интерес зависимость цены риска от формы функции полезности. Введем сначала количественное понятие неприятия риска.

5.2.2 Неприятие риска

Определение 5.3 Неприятием риска (для заданной строго вогнутой функции полезности U) называется отношение

$$a(z) = -U''(z)/U'(z).$$

Интересующая нас связь описывается теоремой Пратта [7]. Рассмотрим две функции полезности U_1, U_2 и обозначим a_1, a_2 соответствующие величины неприятия риска, π_1, π_2 – цены риска.

5.2.3 Теорема Пратта

Теорема 5.2 Для двух произвольных функций полезности U_1, U_2 следующие утверждения эквивалентны:

- а) $a_1(z) > a_2(z)$, $z \geq 0$;
- б) $\pi_1(X) > \pi_2(X)$, $\forall X$;
- в) Существует функция T такая, что $T'(z) > 0$, $T''(z) < 0$, $z \geq 0$ и

$$U_1(z) = T(U_2(z)), \quad z \geq 0.$$

Доказательство проведем по схеме а) \Leftrightarrow в), б) \Leftrightarrow в), следуя изложению в [6].

1. а) \Rightarrow в). Имеем $a_1(z) > a_2(z)$, $z \geq 0$. Зададим функцию T выражением

$$T(v) = U_1(U_2^{-1}(v)) \quad (52)$$

и покажем, что она обладает требуемыми свойствами. Подстановкой $v = U_2(z)$ легко проверяется, что $U_1(z) = T(U_2(z))$, поэтому остается проверить вогнутость T . Проведем проверку прямым вычислением производных и определением их знака. Имеем:

$$T'(v) = U_1'(U_2^{-1}(v))(U_2^{-1})'(v) = \frac{U_1'(U_2^{-1}(v))}{U_2'(U_2^{-1}(v))} > 0$$

и

$$\begin{aligned} T''(v) &= \frac{U_2'(U_2^{-1}(v)) U_1''(U_2^{-1}(v)) (U_2^{-1}(v))' - U_1'(U_2^{-1}(v)) U_2''(U_2^{-1}(v)) (U_2^{-1}(v))'}{(U_2'(U_2^{-1}(v)))^2} \\ &= \left\{ \frac{U_2'(U_2^{-1}(v)) U_1''(U_2^{-1}(v))}{U_2'(U_2^{-1}(v))} - \frac{U_1'(U_2^{-1}(v)) U_2''(U_2^{-1}(v))}{U_2'(U_2^{-1}(v))} \right\} / \left\{ (U_2'(U_2^{-1}(v)))^2 \right\} \\ &= \frac{U_1'(z)}{(U_2'(z))^2} \left\{ \frac{U_1''(z)}{U_1'(z)} - \frac{U_2''(z)}{U_2'(z)} \right\} = \frac{U_1'(z)}{(U_2'(z))^2} \{a_2(z) - a_1(z)\}, \end{aligned}$$

что строго меньше 0 по предположению.

2. в) \Rightarrow а). Пусть $U_1 = T(U_2)$ и $T' > 0$, $T'' < 0$. Отсюда $U_1' = T'U_2'$ и $U_1'' = T'U_2'' + T''(U_2')^2$, поэтому

$$a_1 = -\frac{U_1''}{U_1'} = -\frac{T'U_2'' + T''(U_2')^2}{T'U_2'} = a_2 - \frac{T''}{T'}U_2',$$

так что, очевидно, $a_1 > a_2$.

3. в) \Rightarrow б). Пусть снова $U_1 = T(U_2)$ и $T' > 0$, $T'' < 0$. Поскольку

$$\pi_i = w + \mathbf{E}X - U_i^{-1}(\mathbf{E}U_i(w + X)), \quad i = 1, 2,$$

имеем:

$$\pi_1 - \pi_2 = U_2^{-1}(\mathbf{E}U_2(w + X)) - U_1^{-1}(\mathbf{E}U_1(w + X)) = U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) - U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y)),$$

где $Y = U_2(w + X)$. По неравенству Йенсена имеем $\mathbf{E}T(Y) < T(\mathbf{E}Y)$, а так как функция U_1^{-1} является возрастающей, то и $U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y)) < U_1^{-1}(T(\mathbf{E}Y))$. Таким образом,

$$\pi_1 - \pi_2 > U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) - U_1^{-1}(T(\mathbf{E}Y)) = U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) - U_1^{-1}(U_1(U_2^{-1}(\mathbf{E}Y))) = 0,$$

что и требовалось.

4. б) \Rightarrow в). Зададим снова T формулой (52), из $\pi_1 > \pi_2$ получим с учетом $U_2 = T^{-1}(U_1)$, $U_2^{-1} = U_1^{-1}(T)$: $U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) > U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y))$, откуда $U_1^{-1}(T(\mathbf{E}Y)) > U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y))$ и, следовательно, ввиду монотонности U_1^{-1} , $T(\mathbf{E}Y) > \mathbf{E}T(Y)$. Выполнение последнего соотношения для произвольной случайной величины Y эквивалентно вогнутости T .

◇

Упражнение 5.4 Для функции полезности $U(z) = 1 - \exp(\alpha z)$ ($\alpha > 0$) выписать меру неприятия риска и явное выражение для цены риска (рисковой премии) π . Какие функции данного класса лежат в \mathcal{U}_A ?

Упражнение 5.5 То же для функции полезности $U(z) = z^\alpha$ ($\alpha > 0$). Какие функции данного класса лежат в \mathcal{U}_A ?

Упражнение 5.6 В теореме 5.2 утверждение в) можно прочесть так: если $U_1 = T(U_2)$ и преобразование T таково, что $T' > 0$, $T'' < 0$, то обладатель функции полезности U_1 менее рискован. Однако, ввиду условия $T' > 0$ функция T взаимно однозначна, следовательно, имеет обратную T^{-1} , так что $U_2 = T^{-1}(U_1)$ и функция U_2 должна бы описывать менее рискованного индивидуума. В чем заключается асимметрия свойств T , не позволяющая сделать такой вывод?

Упражнение 5.7 Теорема 5.2 доказана по схеме, требующей четырех логических цепочек доказательств. Попробуйте найти способ доказательства, использующий минимальное возможное (3) количество цепочек (например, $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$).

Упражнение 5.8 Проверить, является ли цена риска $\pi_{w,U}(X)$ монотонной функцией w при фиксированных X, U . Каков характер монотонности?

6 Простейший процесс риска

6.1 Описание процесса

Рассмотрим простейшую модель процесса риска в терминах следующей игры ([3], гл. XIV): в игре участвуют два игрока, в каждой партии первый игрок выигрывает единицу с вероятностью $p \in (0, 1)$ и проигрывает единицу с вероятностью $q = 1 - p$. Суммарный начальный капитал обоих игроков равен a , начальный капитал первого игрока равен z ; здесь a, z - целые числа, $0 \leq z \leq a$. Таким образом, процесс описывается уравнением

$$X(t) = z + \sum_{i=1}^t Z_i, \tag{53}$$

где Z_1, Z_2, \dots последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с дискретным распределением,

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p, \\ -1, & \text{с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases} \tag{54}$$

Игра заканчивается, когда обнуляется капитал одного из игроков (капитал первого игрока становится равным 0 или a), что трактуется, как разорение соответствующего игрока. Ясно, что при $p < 1/2$ игра невыгодна для первого игрока ввиду $\mathbf{E}Z_1 < 0$, при $p > 1/2$ - выгодна ($\mathbf{E}Z_1 > 0$), а при $p = 1/2$ является нейтральной, "справедливой": $\mathbf{E}Z_1 = 0$. Обозначим t_z - момент разорения первого игрока: $t_z = \min\{t : X(t) = 0\}$ (несобственная случайная величина), q_z вероятность разорения первого игрока при начальном капитале z : $q_z = \mathbf{P}\{t_z < \infty\}$. Отметим, что ввиду известной симметрии игры вероятность разорения \tilde{q}_z второго игрока при начальном капитале первого, равном z , может быть вычислена формальной заменой a на $z - a$ и перестановкой p и q в выражении для q_z .

6.2 Уравнение для вероятности разорения

Если начальный капитал первого игрока равен 0 или a , то игра не проводится и соответствующие значения вероятностей разорения равны

$$q_0 = 1, \quad q_a = 0. \quad (55)$$

Если же $0 < z < a$, то после первой партии капитал первого игрока принимает значение $z + 1$ с вероятностью p или значение $z - 1$ с вероятностью q . Поэтому, по формуле полной вероятности,

$$q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}. \quad (56)$$

(56) представляет собой разностное уравнение второго порядка с характеристическим уравнением

$$\lambda^2 - \frac{1}{p}\lambda + \frac{q}{p} = 0, \quad (57)$$

корни которого равны 1 и q/p , соответственно. Обозначим второй корень

$$y = \frac{q}{p}. \quad (58)$$

6.3 Вычисление вероятностей разорения

Если $p \neq 1/2$, то $y \neq 1$, корни различны, и общее решение уравнения (56) имеет вид

$$q_z = C_1 + C_2 y^z. \quad (59)$$

Используя краевые условия (55), находим значения постоянных C_1 , C_2 и соответствующее частное решение:

$$q_z = \frac{y^z - y^a}{1 - y^a}, \quad p \neq \frac{1}{2}. \quad (60)$$

Вычислим вероятность разорения второго игрока упомянутым формальным приемом. Перестановка p и q означает замену y на y^{-1} , так что

$$\tilde{q}_z = \frac{y^{-(a-z)} - y^{-a}}{1 - y^{-a}} = \frac{y^z - 1}{y^a - 1} = \frac{1 - y^z}{1 - y^a}.$$

Нетрудно заметить, что $q_z + \tilde{q}_z = 1$, так что в игре без ограничения времени с вероятностью 1 происходит разорение одного из игроков.

При $p = 1/2$ имеем $y = 1$, так что корни характеристического уравнения вещественны и совпадают. Второе линейно независимое решение уравнения (56) имеет в этом случае вид z , общее решение - $q_z = C_1 + C_2 z$, частное решение -

$$q_z = 1 - \frac{z}{a}, \quad p = \frac{1}{2}. \quad (61)$$

К тому же результату можно прийти, раскрывая неопределенность в (60) при $y \rightarrow 1$ по правилу Лопиталья. Вероятность разорения второго игрока имеет вид

$$\tilde{q}_z = 1 - \frac{a - z}{a} = \frac{z}{a},$$

так что снова с вероятностью 1 происходит разорение одного из игроков.

Функция q_z в (60) и (61) монотонно убывает от 1 до 0 при изменении z от 0 до a . Если $p > 1/2$, то $y < 1$, и (60) является выпуклой; если же $p < 1/2$, то $y > 1$, и (60) является вогнутой.

6.4 Игра с бесконечно богатым противником

Изучим поведение вероятности разорения при $a \rightarrow \infty$; для случая $p \leq 1/2$ при произвольном фиксированном z имеем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} q_z = 1,$$

что означает бесперспективность игры с бесконечно богатым противником в случае невыгодности ($p < 1/2$) или нейтральности ($p = 1/2$) игры. При $p > 1/2$ получаем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} q_z = y^z = e^{-\alpha z},$$

т.е. зависимость вероятности разорения от начального капитала является экспоненциальной с показателем $\alpha = -\ln y = -\ln(q/p) > 0$. Отметим, что условие положительности рискованной надбавки $\mathbf{E}Z_1 > 0$ эквивалентно $p > 1/2$.

7 Классический процесс риска

Классический процесс риска изучался на протяжении всего 20 века, начиная с работы Лундберга [4]. Уравнением этого процесса описывается динамический портфель страховой компании, банка, других финансовых организаций, являющихся перераспределителями финансовых потоков в окружении рискованной среды. Среди других приложений можно упомянуть описание уровня воды в водохранилище.

7.1 Определение

Рассмотрим определение процесса риска на примере работы страховой компании. Пусть страховые премии поступают равномерным потоком¹ с интенсивностью \tilde{c} , а в случайные моменты времени $0 < T_1 < T_2 < \dots$ наступают страховые события, наносящие ущерб случайного размера $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \dots$, соответственно. Тогда размер капитала компании в момент времени t при условии, что начальный капитал (в момент времени $T_0 = 0$) равен x , описывается выражением

$$\tilde{X}(t) = x + \tilde{c}t - \sum_{i=1}^{N(t)} \tilde{Z}_i, \quad (62)$$

где

$$N(t) = \max\{k : T_k \leq t\} - \quad (63)$$

количество страховых событий, наступивших в интервале времени $[0, t]$. Поскольку моменты времени T_i , $i = 1, 2, \dots$ случайны, случайными оказываются и промежутки времени между последовательными страховыми событиями

$$\theta_i = T_{i+1} - T_i \geq 0. \quad (64)$$

¹От требования равномерности потока можно избавиться введением так называемого **операционного времени**; этот прием будет рассмотрен позже.

Случайный процесс вида (62) называется **классическим процессом риска**, если случайные величины θ_i , $i = 1, 2, \dots$ являются независимыми, одинаково распределенными и имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$F_\theta(v) = \mathbf{P}\{\theta_1 \leq v\} = 1 - \exp(-\lambda v), \quad v \geq 0, \quad (65)$$

случайные величины \tilde{Z}_i , $i = 1, 2, \dots$ также являются независимыми и одинаково распределенными и имеют функцию распределения

$$\tilde{F}_{\tilde{Z}}(v) = \mathbf{P}\{\tilde{Z}_1 \leq v\}, \quad v \geq 0; \quad \tilde{F}_{\tilde{Z}}(0) = 0. \quad (66)$$

При этом, как известно [3], количество страховых событий $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt :

$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (67)$$

а накопленный размер страховых убытков

$$\tilde{Z}_{[0,t]} = \sum_{i=1}^{N(t)} \tilde{Z}_i$$

на интервале времени $[0, t]$ является случайной величиной с так называемым составным распределением Пуассона, функция распределения которого имеет вид

$$\mathbf{P}\{\tilde{Z}_{[0,t]} \leq v\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \tilde{F}_{\tilde{Z}}^{*k}(v), \quad v \geq 0, \quad (68)$$

где F^{*k} означает k – кратную свертку функции распределения F с собой, т.е. функцию распределения суммы k независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F .

В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть зависимость значения процесса $\tilde{X}(t)$ от случайного аргумента $\omega \in \Omega$, будем использовать обозначение $\tilde{X}(\omega, t)$, в частности, отдельную траекторию процесса при фиксированном ω будем обозначать

$$\tilde{X}_\omega = \{\tilde{X}(\omega, t), \quad t \geq 0\}. \quad (69)$$

Как видим, классический процесс риска вполне определяется значениями четырех параметров $(x, \tilde{c}, \lambda, \tilde{F}_{\tilde{Z}})$, удовлетворяющих условиям

$$x \geq 0, \quad \tilde{c} > 0, \quad \lambda > 0, \quad \tilde{F}_{\tilde{Z}}(0) = 0. \quad (70)$$

Произвольный классический процесс риска с фиксированными значениями параметров, удовлетворяющих условиям (70), будем обозначать

$$\tilde{X} = \tilde{X}(x, \tilde{c}, \lambda, \tilde{F}_{\tilde{Z}}), \quad (71)$$

а совокупность всех классических процессов риска с такими параметрами –

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{\tilde{X}(x, \tilde{c}, \lambda, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) : x \geq 0, \tilde{c} > 0, \lambda > 0, \tilde{F}_{\tilde{Z}}(0) = 0\}. \quad (72)$$

7.2 Разорение процесса

Под разорением процесса (62) понимается достижение уровня 0, то есть событие

$$\widetilde{\mathcal{R}}(x) = \widetilde{\mathcal{R}}(x, \lambda, \tilde{c}, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) = \{\omega \in \Omega : \exists t \geq 0, \widetilde{X}(\omega, t) \leq 0\}, \quad (73)$$

при этом **моментом разорения** называется случайная величина

$$\tilde{\tau}(x) = \tilde{\tau}(x, \lambda, \tilde{c}, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) = \min\{t : \widetilde{X}(t) \leq 0\}. \quad (74)$$

Эта случайная величина зависит от параметров процесса (62) и может оказаться несобственной, с положительной вероятностью принимая значение ∞ ; такая ситуация соответствует траекториям, которые не разоряются на всей временной полуоси $[0, \infty)$.

Вероятностью разорения процесса (62) называется величина

$$\mathbf{P}\{\tilde{\tau}(x) < \infty\} = \mathbf{P}(\widetilde{\mathcal{R}}(x)),$$

т.е. вероятностная мера множества тех траекторий, которые разоряются за конечное время. Эта величина также является, очевидно, функцией параметров процесса, что будем подчеркивать обозначением

$$\tilde{R}(x) = \tilde{R}(x, \lambda, \tilde{c}, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) = \mathbf{P}\{\tilde{\tau}(x) < \infty\}. \quad (75)$$

В некоторых случаях более удобной характеристикой процесса риска оказывается вероятность выживания процесса

$$\tilde{S}(x) = \tilde{S}(x, \lambda, \tilde{c}, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) = 1 - \tilde{R}(x). \quad (76)$$

7.3 Зависимость вероятности разорения процесса от параметров

Отметим следующие свойства монотонности вероятности разорения, как функции параметров процесса.

- \tilde{R} является невозрастающей функцией x ;
- \tilde{R} является невозрастающей функцией \tilde{c} ;
- \tilde{R} является неубывающей функцией λ ;
- \tilde{R} является невозрастающей функцией $\tilde{F}_{\tilde{Z}}$, если порядок на множестве функций распределения задан отношением $F_1 \preceq F_2 \iff F_1(x) \leq F_2(x) \forall x$.

Проверка перечисленных свойств производится путем сравнения событий разорения (73) при соответствующих значениях параметров.

8 Агрегированный процесс риска

В данном разделе рассматривается процесс риска в дискретном времени, который оказывается тесно связанным с классическим процессом риска посредством операции агрегирования.

8.1 Операция агрегирования

Рассмотрим классический процесс риска (62), зафиксируем число $\delta > 0$ и разобьем положительную полуось \mathbf{R}^+ на интервалы $\Delta_i = [(i-1)\delta, i\delta)$ длины δ . Далее, сгруппируем все премиальные поступления и страховые убытки, произошедшие в этих интервалах времени. Тогда размер премиальных поступлений за любой период Δ_i равен, очевидно,

$$c = \tilde{c}\delta. \quad (77)$$

Размер Z_i накопленных страховых убытков на интервале Δ_i вычисляется следующим образом. Для каждого i размер Z_i является случайной величиной, причем для $i = 1$ ее распределение уже вычислено в (68), следует лишь подставить значение длины интервала времени $t = \delta$:

$$F_Z(v) = \mathbf{P}\{Z_1 \leq v\} = \mathbf{P}\{\tilde{Z}_{[0,\delta)} \leq v\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\delta} \frac{(\lambda\delta)^k}{k!} \tilde{F}_Z^{*k}(v), \quad v \geq 0. \quad (78)$$

Далее, ввиду стационарности потока страховых событий и независимости и одинаковой распределенности убытков классического процесса риска $\{\tilde{Z}_k, k = 1, 2, \dots\}$ размеры убытков $\{Z_i, i = 1, 2, \dots\}$ на интервалах Δ_i также являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения (78).

Таким образом, значение классического процесса риска (62) в момент времени $n\delta$ при целых n равно

$$X(n) = x + cn - \sum_{i=1}^n Z_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (79)$$

Процесс (79) называется **агрегированным процессом риска** и является аппроксимирующей моделью для классического процесса риска при $\delta \rightarrow 0$.

Ясно, что процесс (79) зависит от трех параметров (x, c, F_Z) вычисляемых по параметрам исходного классического процесса $(x, \tilde{c}, \lambda, \tilde{F}_Z)$ и значению параметра агрегирования δ по формулам (77), (78). Будем обозначать

$$X = X(x, c, F_Z) \quad (80)$$

агрегированный процесс риска, определяемый параметрами x, c, F_Z , а \mathcal{X} – совокупность всех агрегированных процессов риска при всевозможных допустимых значениях параметров:

$$\mathcal{X} = \{X(x, c, F_Z); x \geq 0, c > 0, F_Z(0) = 0\}. \quad (81)$$

8.2 Разорение

Обозначим

$$\mathcal{R}(x, c, F_Z) = \mathcal{R}(x) = \{\omega : \exists n > 0, X_\omega(n) \leq 0\} \quad (82)$$

событие разорения агрегированного процесса,

$$\tau(x) = \tau(x, c, F_Z) = \min\{n : X(n) \leq 0\} - \quad (83)$$

момент разорения и

$$R(x) = R(x, c, F_Z) = \mathbf{P}\{\tau < \infty\}, \quad (84)$$

$$S(x) = S(x, c, F_Z) = \mathbf{P}\{\tau = \infty\} = 1 - R(x) \quad - \quad (85)$$

вероятность разорения и выживания процесса, соответственно. Рассматривая отношение включения событий разорения (выживания) при различных значениях параметров процесса риска, нетрудно заключить, что вероятность выживания является неубывающей функцией начального капитала x , интенсивности премиального потока c и функции распределения убытков F_Z , если на множестве функций распределения рассмотреть естественный частичный порядок

$$F_1 \preceq F_2 \iff F_1(v) \leq F_2(v), v \geq 0.$$

8.3 Случайное блуждание

Агрегированный процесс риска заменой переменных $Y_i = c - Z_i$, $i = 1, 2, \dots$ можно представить в виде случайного блуждания [3]

$$X(n) = x + \sum_{i=1}^n Y_i \quad (86)$$

с независимыми одинаково распределенными "шагами" Y_i , $i = 1, 2, \dots$. Отсюда, используя теорему п. 2.XII.2 из [3], выводим

Теорема 8.1 *Агрегированный процесс риска (79) может принадлежать к одному и только к одному из трех типов в зависимости от соотношения между его параметрами:*

1. $c = \mathbf{E}Z_1$: осциллирующий тип; процессы этого типа с вероятностью единица достигают любого наперед заданного уровня; точнее:

$$\mathbf{P}\{\inf_{n \in \mathbf{N}} X(n) = -\infty\} = 1 \quad (87)$$

и

$$\mathbf{P}\{\sup_{n \in \mathbf{N}} X(n) = \infty\} = 1. \quad (88)$$

2. $c < \mathbf{E}Z_1$: разоряющийся тип; для процессов этого типа выполняется (87) и с вероятностью 1 существует конечный максимум

$$\mathbf{M}(x) = \max_{n \in \mathbf{N}} X(n). \quad (89)$$

3. $c > \mathbf{E}Z_1$: *выживающий тип*; для процессов этого типа выполняется (88) и с вероятностью 1 существует конечный минимум

$$\mathbf{m}(x) = \min_{n \in \mathbf{N}} X(n). \quad (90)$$

Из приведенной теоремы ясно, что процессы первого типа ввиду (87) разоряются с вероятностью 1. Поскольку для процессов второго типа (87) также имеет место, они тоже являются разоряющимися с вероятностью 1. Для процессов третьего типа вероятность выживания есть

$$S(x) = \mathbf{P}\{\mathbf{m}(x) > 0\} \quad (91)$$

и может быть, вообще говоря, положительной. Более того, поскольку для произвольных $x, y \geq 0$ имеет место $\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(y) + (x - y)$, для G_x – функции распределения $\mathbf{m}(x)$ – получаем

$$G_x(v) = \mathbf{P}\{\mathbf{m}(x) \leq v\} = \mathbf{P}\{\mathbf{m}(y) - y \leq v - x\} = G_y(v + y - x) \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow \infty$ и фиксированных v, y , поэтому справедлива

Теорема 8.2 Пусть выполнено

$$c > \mathbf{E}Z_1. \quad (92)$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 1. \quad (93)$$

Замечание 8.1 Условие (92) обычно называется условием положительности рисковой надбавки $c - \mathbf{E}Z_1$.

8.4 Уравнение для вероятности разорения

Используя формулу полной вероятности, нетрудно вывести интегральное уравнение для вероятности выживания процесса (79), как функции начального капитала. Зафиксируем параметры c, F_Z , и определим событие "выживание при условии, что начальный капитал равен x ":

$$\mathcal{S}(x) = \{\omega \in \Omega : X(n) > 0, n = 0, 1, \dots; X(0) = x\}, \quad (94)$$

а для интервала I – аналогичное событие "выживание при условии, что начальный капитал принадлежал интервалу I ":

$$\mathcal{S}(I) = \{\omega \in \Omega : X(n) > 0, n = 0, 1, \dots; X(0) \in I\}. \quad (95)$$

Ясно, что $\mathcal{S}(x) \subseteq \mathcal{S}_1 = \{Z_1 < x + c\}$. Для произвольного целого $m > 0$ разобьем отрезок $[0, x + c)$ на m равных частей I_k длины $\gamma = (x + c)/m$: $I_k = [(k - 1)\gamma, k\gamma)$, $k = 1, \dots, m$. Тогда по формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\mathcal{S}(x)\} = \sum_{k=1}^m \mathcal{S}(x + c - I_k) \mathbf{P}\{Z_1 \in I_k\} = \sum_{k=1}^m \mathcal{S}(x + c - I_k) (F_Z(k\gamma) - F_Z((k - 1)\gamma)).$$

Правая часть последнего выражения представляет собой, очевидно, интегральную сумму для интеграла

$$\int_0^{x+c} S(x+c-v) dF_Z(v),$$

и сходится к нему при $m \rightarrow \infty$, а левая часть не зависит от m и равна $S(x)$, так что

$$S(x) = \int_0^{x+c} S(x+c-v) dF_Z(v). \quad (96)$$

Это интегральное уравнение позволяет изучать многие свойства агрегированного процесса риска, выраженные в терминах вероятностей выживания или разорения.

8.5 Пример: простейший процесс риска

Положим $c = 1$, $p \in (0, 1)$ и

$$F_Z(v) = \begin{cases} 0, & v < 0, \\ p, & 0 \leq v < 2, \\ 1, & v \geq 2. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что при этом агрегированный процесс риска (79) превращается в простейший процесс риска (53), а уравнение для вероятности выживания приобретает вид

$$S(x) = S(x+1) + (1-p)S(x-1),$$

что согласуется с (56).

9 Время жизни процессов риска

В параграфах 6–8 получены уравнения для вероятности разорения. Представляет интерес также и момент разорения. В настоящем параграфе изучим среднее время жизни процессов риска.

9.1 Простейший процесс риска

Рассмотрим простейший процесс риска (53):

$$X_n = z + \sum_{i=1}^n Z_i, \quad (97)$$

где Z_i , $i = 1, 2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью p и значение -1 с вероятностью $q = 1 - p$, и обозначим τ_z момент окончания игры (разорения одного из игроков) при условии, что первый игрок имел начальный капитал z , а второй: $a - z$:

$$\tau_z = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ или } X_n = a\}. \quad (98)$$

Как мы помним, на бесконечном горизонте времени разорение одного из игроков наступает с вероятностью 1, так что τ_z является собственной случайной величиной.

Обозначим $m(z) = \mathbf{E}\tau_z$ ее среднее значение, и поставим задачу вычисления этой величины. Из формулы полной вероятности для математических ожиданий нетрудно получить уравнение для $m(z)$ вида $m(z) = 1 + pm(z+1) + qm(z-1)$, откуда

$$m(z+1) - \frac{1}{p}m(z) + \frac{q}{p}m(z-1) = -\frac{1}{p}. \quad (99)$$

Характеристическое уравнение для (99) имеет корни $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = q/p = y$. Рассмотрим сначала случай некрatных корней $y \neq 1$ ($p \neq 1/2$). Тогда частное решение неоднородного уравнения (99) имеет вид $m_0(z) = \frac{z}{p(y-1)}$, так что его общее решение запишется в форме

$$m(z) = C_1 + C_2y^z + \frac{z}{p(y-1)}. \quad (100)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 можно определить из краевых условий $m(0) = m(a) = 0$, которые дают

$$-C_2 = C_1 = \frac{a}{p(1-y)(1-y^a)},$$

так что решение уравнения (99) есть

$$m(z) = \frac{1}{p(1-y)} \left(a \frac{1-y^z}{1-y^a} - z \right). \quad (101)$$

В случае кратных корней $y = 1$ ($p = 1/2$) общее решение уравнения (99) имеет вид $C_1 + C_2z + m_0(z)$, где частное решение $m_0(z)$ легко находится в классе квадратичных функций и равно $m_0(z) = -z^2$, так что искомое решение после определения постоянных из краевых условий записывается в форме

$$m(z) = z(a-z). \quad (102)$$

Интересно отметить, что решение (102) может быть получено предельным переходом из (101) с помощью двукратного применения правила Лопиталья.

Рассмотрим, наконец, игру с бесконечно богатым противником ($a \rightarrow \infty$). При $y < 1$ из (101), видно, что среднее время жизни неограниченно увеличивается. Этот эффект связан с тем, что при $y < 1$ имеем $p > 1/2$, и даже в игре с бесконечно богатым противником первый игрок разоряется с вероятностью, меньшей 1, то есть с положительной вероятностью время жизни процесса бесконечно.

При $y = 1$ из (102) также вытекает $m(z) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что хотя в этом случае ($p = 1/2$) первый игрок и разоряется с вероятностью 1 в игре с бесконечно богатым противником, однако среднее время ожидания разорения бесконечно велико.

При $y > 1$ ($p < 1/2$) из (101) следует, что ожидаемое время до разорения в игре с бесконечно богатым противником есть

$$m(z) = \frac{z}{p(y-1)},$$

и линейно возрастает вместе с z .

9.2 Игра в кошки – мышки

Рассмотрим еще одну задачу на вычисление ожидаемой продолжительности процесса. Пусть в двух комнатах обитают кот и мышь, и перемещаются из комнаты в комнату независимо друг от друга в соответствии с матрицами переходных вероятностей

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad (103)$$

где элемент c_{ij} матрицы C есть вероятность перемещения кота из комнаты i в комнату j ; $i, j = 1, 2$, а элементы матрицы M описывают аналогичные вероятности для мыши. Если в какой-либо из моментов времени кот и мышь оказываются в одной комнате, то кот съедает мышь. Определить среднее время жизни мыши при различных начальных расположениях.

Опишем задачу в виде марковской цепи с четырьмя состояниями $E = (i, j)$; $i, j = 1, 2$: кот находится в комнате i , а мышь – в комнате j , и обозначим t_{ij} среднее время оставшейся жизни мыши в состоянии (i, j) . Обозначим E_n состояние цепи в момент времени n , тогда, очевидно, $t_{11} = t_{22} = 0$, а для t_{12}, t_{21} по формуле полной вероятности запишем уравнения

$$t_{12} = 1 + t_{12}\mathbf{P}\{E_1 = (1, 2)|E_0 = (1, 2)\} + t_{21}\mathbf{P}\{E_1 = (2, 1)|E_0 = (1, 2)\},$$

$$t_{21} = 1 + t_{12}\mathbf{P}\{E_1 = (1, 2)|E_0 = (2, 1)\} + t_{21}\mathbf{P}\{E_1 = (2, 1)|E_0 = (2, 1)\}.$$

Вычисляя переходные вероятности с учетом условия независимости, получаем систему уравнений

$$0.94t_{12} - 0.56t_{21} = 1,$$

$$-0.48t_{12} + 0.92t_{21} = 1,$$

которая имеет решение $t_{12} = 2.483$, $t_{21} = 2.383$.

Список литературы

- [1] *Методика расчета тарифных ставок по рисковым видам страхования.* Финансовая газета, 1993, № 40, с. 2-3.
- [2] ФОН НЕЙМАН Дж., МОРГЕНШТЕРН О. (1970) *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука.
- [3] В.ФЕЛЛЕР. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* 1,2, М.: Мир, 1984.
- [4] LUNDBERG F.I. (1903) *Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen, II. Aterförsäkring av Kollektivrisker.*—Uppsala: Almqvist & Wiksell.
- [5] RICHARD D. MACMINN (1989) *The expected Utility Theorem.* Lecture note, 11p., http://kiwiclub.bus.utexas.edu/uncertainty/expected_utility/eu.pdf

- [6] RICHARD D. MACMINN (1996) *Notes on Pratt's 'Risk Aversion in the Small and in the Large'*. Lecture note, 6p., http://kiwiclub.bus.utexas.edu/uncertainty/expected_utility/pratt.pdf
- [7] PRATT J.W. (1964) Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, **32**, pp. 122–136.